# Quand un graffiti ouvre la voie...

Gilles Dowek

Au cours de l'été 1988, en vacances à Barcelone, j'ai vu un graffiti – qui a sans doute été effacé depuis –

```
 12345679
x      36
 --------
 74074074
37037037
---------
444444444
```

Je ne savais pas que je venais de trouver le sujet d'une note que j'ai écrite en 2013, mais je me posais déjà un certain nombre de questions à propos de cette multiplication. Première question : pouvait-on démontrer que le résultat de la multiplication était un nombre qui ne contenait que le chiffre 4. Bien entendu, il suffisait d'effectuer la multiplication pour se convaincre que le nombre obtenu ne contenait que le chiffre 4. Mais cette réponse laissait un peu sur sa faim. N'y avait-il pas autre chose à comprendre ? Deuxième question : pourquoi le chiffre 8 était-il absent du multiplicande ? Et cela rendait-il cette multiplication moins extraordinaire ? J'avais déjà remarqué, je crois, que le multiplicateur, 36, était égal à $4 \times 9$ et que la présence du chiffre 4 dans le résultat était donc superficielle. La multiplication extraordinaire était sans doute, non $12345679 \times 36 = 444444444$, mais $12345679 \times 9 = 111111111$.

J'ai ensuite oublié cette histoire, j'ai continué mon voyage en Espagne, puis commencé, à la rentrée, une thèse sur les démonstrations en informatique.

À cette époque, le théorème des quatre couleurs avait déjà été démontré en utilisant un ordinateur – la démonstration date de 1976 – mais bizarrement, peu de chercheurs en démonstration automatique semblaient considérer que cette démonstration était un succès de leur discipline. De fait, ce théorème n'avait pas été démontré par une méthode de démonstration automatique, comme la Résolution ou la méthode des tableaux, mais par un programme « ad hoc », un peu comme les programmes qui calculent les décimales de $\pi$, que l'on ne considère pas comme des succès de la démonstration automatique, même s'ils « démontrent » que la millième décimale de $\pi$ est un 9.

Je n'ai commencé à me poser des questions sur cette démonstration qu'à la fin des années quatre-vingt-dix, quand j'ai commencé à m'intéresser aux rapports entre calcul et raisonnement dans les démonstrations mathématiques. Un point intriguant était que la démonstration du théorème des quatre couleurs avait mauvaise réputation. D'une part parce que la possibilité d'un bug n'était pas écartée dans le programme qui avait effectué l'énorme calcul que la démonstration demandait. D'autre part, parce que même si on admettait sa correction, elle montrait que toute carte était coloriable avec quatre couleurs, mais n'expliquait pas pourquoi. Il y avait donc un présupposé qu'une « vraie » démonstration devait être explicative. Je me suis alors posé la question du bien-fondé de ce présupposé et j'ai cherché des exemples simples de démonstrations explicatives et non explicatives, pour défendre l'idée que « démonstration » et « explication » étaient des choses différentes.

C'est alors que je me suis souvenu de cette démonstration non explicative que tous les chiffres du produit $12345679 \times 36$ étaient des 4 : faire la multiplication, et de la démonstration légèrement plus explicative : faire la multiplication $12345679 \times 9 = 111111111$, puis multiplier par 4 des deux cotés. D'ailleurs, n'était-ce pas le fait qu'on puisse aussi multiplier par 3 ou par 5, qui rendait cette démonstration plus explicative ? N'était-ce pas le fait de démontrer un théorème plus général, pour ensuite l'utiliser dans un cas particulier – ce qu'en logique on appelle une coupure sur le quantificateur universel –, qui rendait cette démonstration plus explicative ?

Une recherche sur le Web m'a vite appris que cette multiplication était attribuée à Lewis Carrol, qui en avait fait un tour de magie : il demandait à un enfant de lui donner son chiffre préféré, le multipliait mentalement par 9, et demandait à l'enfant de multiplier 12345679 par le nombre obtenu, ce qui donnait un résultat, qui ne contenait que ce chiffre préféré.

En 2013, les organisateurs des rencontres interdisciplinaires de Rochebrune « La preuve et ses moyens » m'ont demandé un exposé sur la notion de démonstration et j'ai décidé de commencer mon exposé « *Une démonstration est-elle une explication ?* » par cet exemple, que j'ai, par la suite, utilisé ici et là.

Ce débat sur le caractère explicatif ou non des démonstrations, qui est parfois un peu austère, et souvent polémique quand on l'aborde par la question des démonstrations construites avec des ordinateurs, est ainsi rendu beaucoup plus accessible, et aussi plus détendu, quand on l'aborde par cet exemple.