Les mathématiques à rebours de théorèmes de type Ramsey

Ludovic Patey

Beaucoup de théorèmes peuvent être vus comme des problèmes mathématiques, exprimés en termes d'*instances* et de *solutions*. Par exemple, le lemme de König énonce que tout arbre à branchement fini comportant un nombre infini de nœuds admet un chemin infini. Ici, une instance du lemme de König est un arbre, et une solution est un chemin infini à travers l'arbre. Un autre exemple classique est le théorème des valeurs intermédiaires, qui dit que toute fonction continue des réels vers les réels changeant de signe sur un intervalle, atteint la valeur 0 quelque part. Une instance est alors une fonction continue f, et une solution est un réel x tel que $f(x) = 0$. Ces théorèmes affirment l'existence d'une solution pour chaque instance. Cependant certaines preuves sont non-constructives, et certaines constructions sont non-effectives, au sens où il n'existe parfois pas d'algorithme permettant de décrire une solution étant donnée une instance. Par exemple, la preuve du lemme de König décrit une manière de construire un chemin infini à travers un arbre infini, mais cette construction ne peut pas être implémentée par un programme informatique, car elle demande de prendre des décisions non-calculables, notamment de choisir une sous-branche infinie d'un arbre. On considère alors qu'un tel théorème, vu comme un problème, est *non calculable*. L'existence de théorèmes non calculables soulève de nombreuses questions, notamment “Quelle est la puissance calculatoire nécessaire pour résoudre le problème associé au théorème ?”, ou bien “Si l'on dispose d'un oracle permettant de résoudre un théorème A, quels sont les autres théorèmes que l'on serait capable de résoudre calculatoirement ?”

Il existe plusieurs formalismes pour exprimer ce genre de questions. L'approche la plus simple est probablement celle de la calculabilité, avec la *réduction calculatoire*. On dit qu'un problème P se réduit calculatoirement à un problème Q si toute instance de P peut être transformée calculatoirement en une instance de Q, de telle sorte que toute solution de Q calcule une solution de P. La réduction calculatoire hérite de toute la robustesse et la naturalité de la notion de calcul au sens de Turing. Une autre approche, celle de la théorie de la preuve, consiste à se placer dans une théorème axiomatique très faible, RCA_0, dont les axiomes (les postulats de base) ont été spécialement choisis pour capturer les “mathématiques calculatoires”, et à comparer les théorèmes du point de vue de l'implication logique. Ici, un théorème Q est intuitivement plus fort que P si l'implicaction $Q \rightarrow P$ est prouvable dans RCA_0. Cette approche, appelée *mathématiques à rebours*, est plus générale que la réduction calculatoire, au sens où elle permet de comparer des énoncés qui ne peuvent pas être exprimés en terme d'instances et de solutions. Elle a notamment permis de classifier une grande partie des mathématiques de la vie de tous les jours, et de comprendre leurs relations de d'interdépendances du point de vue calculatoire.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à une classe de théorèmes provenant de la *théorie de Ramsey*. Informellement, cette théorie nous dit qu'étant donné une suffisament grande collection d'objets, il est toujours possible d'obtenir une sous-collection arbitrairement grande qui satisfera certaines propriétés structurelles. L'exemple le plus connu est le *théorème de Ramsey*, qui énonce que pour tout coloriage des n-uplets d'entiers naturels avec k couleurs, il existe un ensemble infini d'entiers H tel que tous les n-uplets sur cet ensemble ont la même couleur. Ici encore, il est possible de voir le théorème de Ramsey comme un problème dont les instances sont des coloriages, et les solutions des ensembles infinis monochromatiques. Le théorème de Ramsey a des ramifications dans beaucoup de branches de l'informatique et des mathématiques. L'étude du contenu calculatoire du théorème de Ramsey constitue à lui seul un pan entier des mathématiques à rebours modernes, en raison de la complexité des outils mis en oeuvre pour l'étudier et son instabilité calculatoire face à de légères variations de l'énoncé.

Cette thèse porte sur l'étude du contenu calculatoire de nombreux théorèmes mathématiques qui sont des conséquences du théorème de Ramsey. Nous avons notamment montré que le nombre de couleurs utilisé dans les coloriages avait une influence sur la puissance calculatoire du théorème de Ramsey, aussi bien du point de vue de la réduction calculatoire que de celui des mathématiques à rebours. Nous avons également revisité des résultats existants pour en simplifier les preuves, et surtout les uniformiser. Au-delà des réponses, nous avons cherché à augmenter notre capacité à répondre, en développant un ensemble d'outils unifiés permettant d'extraire simplement le contenu calculatoire des conséquences du théorème de Ramsey.