Le bon algorithme de jeu ?

Jean-Paul Delahaye [1]

La rubrique récréation informatique propose une petite énigme algorithmique ou à propos d'un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

Vous êtes face à une machine qui, lorsque vous lui donnez un entier n, vous répond par $P(n)$, où P est un polynôme à coefficients entiers positifs dont vous ignorez le degré et les coefficients. Vous voulez connaître le polynôme que la machine utilise (donc son degré et ses coefficients). Chaque calcul de $P(n)$ est payant et vous coûte 100 euros. Combien allez-vous dépenser en vous y prenant au mieux ?

SOLUTION. La bonne réponse m'a été envoyée par plusieurs lecteurs qui sont dans l'ordre d'arrivée des messages : Julien Bernard, Denis Monnerat, Eric Wegrzynowski et Arnaud Fréville. Merci à eux de leur participation.

Il fallait répondre 200 euros. En effet, deux évaluations de P suffisent pour connaître P.

On commence par demander $P(1)$.

— Si $P(1) = 0$, c'est que tous les coefficients sont nuls.

— Si $P(1) = 1$, c'est qu'il n'y a qu'un seul coefficient non nul qui vaut 1. Le polynôme est donc de la forme $P(X) = X^k$. Pour connaître k, on demande $P(2) = a$, qui bien sûr permet (en prenant le logarithme en base 2 de a) de connaître k, et donc P.

1. Université de Lille 1, Sciences et Technologies, Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, UMR 8022 CNRS, Bât M3-ext, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex. E-mail : delahaye@lifl.fr.

1024 – Bulletin de la société informatique de France, numéro 4, octobre 2014, pp. 143–144

— Si $P(1) = a > 1$, on demande $P(a+1) = b$. L'entier $a+1$ est un entier strictement supérieur à chaque coefficient du polynôme et

$$b = P(a+1) = a_0 + a_1(a+1)^1 + a_2(a+1)^2 + ... + a_k(a+1)^k.$$

On calcule alors la décomposition en base de numération $(a+1)$ de b (il faut quelques divisions euclidiennes). On trouve bien sûr que b s'écrit

$$a_k \dots a_2 a_1 a_0.$$

On a donc les coefficients du polynôme, et bien sûr son degré.

Nouveau problème : le bon algorithme de jeu ?

Cinquante boîtes sont placées en ligne sur une table devant vous :

`1 2 3 4 5 ... 48 49 50`

Elles sont numérotées de 1 à 50. Dans chacune a été enfermée une somme d'argent dont le montant est inscrit bien clairement sur le couvercle. Vous pouvez vérifier que tout est exact. Vous allez jouer contre un adversaire qui pourra utiliser un ordinateur pour s'aider s'il le souhaite, alors que vous devrez vous contenter de calculs mentaux. La règle est simple : à tour de rôle, vous prendrez une boîte à l'une des deux extrémités de la ligne des boîtes encore présentes, et elle vous sera temporairement acquise. Quand la ligne de boîtes sera épuisée, celui des deux joueurs qui aura acquis la plus forte somme sera déclaré vainqueur et emportera alors le total du contenu de toutes les boîtes. Pour éviter les parties nulles, le total de l'argent contenu dans les boîtes est impair et chaque boîte contient un nombre entier d'euros.

Puisque votre adversaire a l'avantage de pouvoir s'aider d'un ordinateur pour faire ses choix, on vous laisse commencer. Pouvez-vous gagner de manière certaine ? Si oui, quel est l'algorithme de jeu qui permet cela ? Sinon, pourquoi ?

Envoyez vos réponses à delahaye@lifl.fr. Le nom des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.