S'approcher du but...

Jean-Paul Delahaye [1]

La rubrique récréation informatique propose une petite énigme algorithmique ou à propos d'un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

LE BON ALGORITHME DE JEU ?

Cinquante boîtes sont placées en ligne sur une table devant vous :

1 2 3 4 5 ... 48 49 50

Elles sont numérotées de 1 à 50. Dans chacune a été enfermée une somme d'argent dont le montant est inscrit bien clairement sur le couvercle. Vous pouvez vérifier que tout est exact. Vous allez jouer contre un adversaire qui pourra utiliser un ordinateur pour s'aider s'il le souhaite, alors que vous devrez vous contenter de calculs mentaux. La règle est simple : à tour de rôle, vous prendrez une boîte à l'une des deux extrémités de la ligne des boîtes encore présentes, et elle vous sera temporairement acquise. Quand la ligne de boîtes sera épuisée, celui des deux joueurs qui aura acquis la plus forte somme sera déclaré vainqueur et emportera alors le total du contenu de toutes les boîtes. Pour éviter les parties nulles, le total de l'argent contenu dans les boîtes est impair et chaque boîte contient un nombre entier d'euros.

1. Université de Lille 1, Sciences et Technologies, Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, UMR 8022 CNRS, Bât M3-ext, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex. E-mail : delahaye@lifl.fr.

Puisque votre adversaire a l'avantage de pouvoir s'aider d'un ordinateur pour faire ses choix, on vous laisse commencer. Pouvez-vous gagner de manière certaine ? Si oui, quel est l'algorithme de jeu qui permet cela ? Sinon, pourquoi ?

SOLUTION. Merci aux lecteurs qui m'ont fait parvenir la bonne réponse. Ce sont dans l'ordre d'arrivée des messages : Élie Cattan, Clément Charnay, Julien Bernard et Jill-Jênn Vie.

Il est possible de gagner. L'idée est astucieuse mais assez simple. Vous faites la somme du contenu des boîtes portant un numéro pair, et la somme du contenu des boîtes portant un numéro impair. Selon que ce sont celles de numéro pair ou impair qui contiennent le plus, vous les prenez, ce qui est possible. En effet, pour prendre toutes les boîtes de numéro pair, vous commencerez par prendre la boîte numéro 50. Puis, après que votre adversaire aura pris la 1 ou la 49 (vous donnant accès à une boîte paire) vous continuerez, ce qui sera facile, car :

(a) quand ce sera à lui de jouer, il aura toujours devant lui une ligne de boîtes dont les numéros extrêmes seront impairs — il sera donc obligé de prendre une boîte impaire — alors que

(b) lorsque ce sera à vous de jouer, vous aurez toujours la possibilité de prendre la boîte paire qu'il viendra de libérer.

Lorsque les boîtes impaires contiennent au total plus que les boîtes paires, vous prenez d'abord la boîte 1, puis à chaque fois une boîte impaire, ce qui, comme précédemment, est possible car votre adversaire à chaque coup n'a le choix qu'entre deux boîtes paires et vous libère une boîte impaire.

On raconte que ce problème aurait été utilisé lors de tests d'embauche par certaines compagnies technologiques. On notera que lorsque le nombre total de boîtes est impair, le gagnant n'est pas déterminé une fois pour toutes et dépend du contenu précis des boîtes.

Pour certains problèmes, le joueur qui commence dispose d'une stratégie gagnante. Par exemple, pour les boîtes (3, 1, 1, 1, 1), il existe une stratégie gagnante (évidente) pour celui qui commence : prendre la boîte contenant 3 euros au premier coup.

Parfois, avec un nombre impair de boîtes, le joueur qui joue en second est certain de gagner en s'y prenant bien. Par exemple, pour les boîtes (1, 2, 3, 10, 3, 2, 1), il existe une stratégie gagnante pour celui qui joue en second : jouer symétriquement au joueur qui commence jusqu'à pouvoir ramasser la boîte contenant 10 euros.

Nouveau Problème

S'APPROCHER DU BUT

Voici un petit problème paradoxal qui m'a été proposé par Aurélien Géron.

Vous êtes placé en un point O, et à une distance d'une unité, il y a un point I. Vous devez vous rendre le plus près possible d'un point X sur le segment de droite OI (par exemple à moins d'un millième d'unité de X), mais vous ne pouvez vous déplacer que par sauts successifs selon la règle simple suivante :

Vous choisissez le point O ou le point I, et votre saut vous conduit alors au point situé au milieu entre le point P ou vous êtes, et le point choisi.

Si, par exemple, vous partez de O et choisissez la séquence I, O, I, I, cela vous mène respectivement aux positions 0,5 — 0,25 — 0,625 — 0,8125.

Fixons maintenant un objectif X à atteindre à moins d'un millième (ou un millionième, etc.). Par exemple X situé à $1/\pi$ de O. Quelle est la plus courte séquence de choix O ou I qui permet de réussir ?

Attention — et c'est là le côté paradoxal du problème — appliquer le principe naturel

« si je suis entre O et X, je vais vers I, si je suis entre X et I, je vais vers O »

ne marche pas du tout. Voici un exemple qui le prouve.

Prenons l'objectif X = 0,6 et appliquons cette méthode. Rapidement, on oscille entre 1/3 et 2/3. Les points obtenus sont en effet (on mesure leur distance à O) :

$$0.5 - 0.75 - 0.375 - 0.6875 - 0.34375 - 0.671875 - 0.3359375 - 0.66796875 -$$

$$0.333984375 - 0.6669921875 - 0.33349609375 - 0.666748046875 -$$

$$0.333374023438 - 0.666687011719 - \ldots$$

Envoyez vos réponses à delahaye@lifl.fr. Le nom des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.