Deux prisonniers très malins

Jean-Paul Delahaye[1]

La rubrique « Récréation informatique » propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

MOINS DE 20 CARTES

Cinquante prisonniers ont l'opportunité d'être libérés tous ensemble s'ils réussissent la difficile épreuve suivante. Les gardiens de la prison écrivent les cinquante noms des prisonniers sur cinquante cartons placés dans cinquante boîtes fermées et alignées sur une grande table. Sans savoir ce qu'auront fait les prisonniers précédents, chaque prisonnier est conduit dans la salle où se trouve la table et doit ouvrir 25 des cinquante boîtes et y trouver son nom. L'épreuve n'est réussie que si chaque prisonnier trouve son nom. Avant que l'épreuve commence, les prisonniers peuvent échanger entre eux pour convenir d'une méthode, mais une fois l'épreuve commencée, ils n'ont plus aucun échange entre eux. Si chaque prisonnier procédait au hasard leur chance de réussir serait de

$$\frac{1}{2^{50}} = 8,881 \times 10^{-16},$$

ce qui est très très peu !

1. Université de Lille 1, Sciences et Technologies, Centre de recherche en informatique signal et automatique de Lille (CRIStAL), UMR 9189 CNRS, Bât M3-ext, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex. E-mail : jean-paul.delahaye@univ-lille1.fr.

Ils peuvent faire beaucoup mieux et avoir une probabilité de réussite supérieure à 30 %. Comment ?

SOLUTION.

Merci à Élie Cattan et Simon Martiel qui m'ont fait parvenir la bonne solution. Certains lecteurs ont proposé des solutions où les prisonniers déplaçaient les boîtes. Cependant ces déplacements (qui sont une façon de faire circuler de l'information entre prisonniers) ne sont pas autorisés puisqu'il était précisé qu'une fois l'épreuve commencée, les prisonniers « n'ont plus aucun échange entre eux ».

La solution consiste pour les prisonniers à s'attribuer avant l'épreuve un numéro de 1 à 50. Chaque prisonnier mémorise le numéro associé à chaque nom. Ensuite, ils opérent de la façon suivante. Quand un prisonnier se trouve devant les cinquante boîtes, il ouvre celle correspondant à son numéro : elles sont alignées sur une grande table ce qui attribue de manière univoque un numéro à chaque boîte. S'il trouve son nom, il peut s'arrêter. S'il ne le trouve pas, il ouvre la boîte correspondant au numéro du nom qu'il a trouvé. S'il trouve son nom dans cette seconde boîte, il peut s'arrêter. Sinon, il continue de la même façon (il va ouvrir la boîte correspondant au numéro du nom qu'il vient de trouver), jusqu'à avoir ouvert 25 boîtes.

En procédant ainsi, un prisonnier trouvera son nom, sauf si le cycle auquel appartient le numéro de son nom dans la décomposition en cycles de la permutation des boîtes (définie par l'ordre qu'elles ont sur la table) possède une longueur plus grande que 25. Les prisonniers gagneront donc, sauf si la décomposition en cycles de la permutation des boîtes comporte un cycle dont la longueur est plus grande que 25. Calculons la probabilité que cela se produise.

On peut supposer que l'ordre des boîtes (et donc la permutation associée) est choisi uniformément parmi les 50 ! permutations possibles des boîtes. En effet l'ordre des noms convenu entre eux par les prisonniers avant l'épreuve est choisi sans rapport avec l'ordre des boîtes fixé par les gardiens de la prison.

Nous allons montrer que la probabilité qu'une permutation d'ordre $2n$ ne contienne pas de cycle d'ordre supérieur à n est supérieure à $1 - \ln 2$ (logarithme népérien) qui vaut 0,306852... ce qui montrera que la probabilité que les prisonniers gagnent est supérieure à 30 %.

Soit k un entier tel que $n < k \leq 2n$. Évaluons le nombre de permutations ayant un cycle d'ordre k parmi les permutations d'ordre $2n$. Il y a

$$C(2n,k) = \frac{(2n)!}{(2n-k)!\,k!}$$

façons de choisir les entiers du cycle, où $C(2n,k)$ est le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi $2n$, appelé aussi coefficient du binôme de Newton. Il y a $(k-1)!$ façons d'ordonner les k entiers choisis en un cycle, et il y a $(2n-k)!$ façons de classer les autres entiers pour déterminer la permutation. Le nombre total de permutations ayant un cycle d'ordre $k > n$ parmi les permutations d'ordre $2n$ est donc :

$$\frac{(2n)!}{(2n-k)!\,k!}(k-1)!(2n-k)! = \frac{(2n)!}{k}.$$

La probabilité qu'il n'y ait aucun cycle d'ordre k supérieur à n est donc :

$$1-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) = 1-H(2n)+H(n),$$

où $H(i) = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{i}$, qui vaut approximativement $\ln i$. La probabilité recherchée vaut donc approximativement :

$$1-\ln 2n+\ln n = 1-\ln 2 = 0,306852.$$

Un suivi détaillé des inégalités montre même que $1-\ln 2$ est une valeur par défaut de la probabilité cherchée et donc que les prisonniers on une probabilité de réussir supérieure à 30,6852 %. Dans le cas précis de notre problème on peut calculer directement cette probabilité (donc sans avoir à s'occuper d'approximation). Elle vaut :

$$1-\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{50}\right) = 0,31675283\ldots$$

Nouveau problème

DEUX PRISONNIERS TRÈS MALINS

Ce problème n'est pas sans rapport avec le précédent et m'a été proposé par Élie Cattan dont je recopie la formulation.

Le nombre de prisonniers est réduit à deux. Les 50 boîtes contiennent des numéros de 1 à 50. Dans cette variante comme dans le précédent problème, les deux prisonniers peuvent convenir d'une stratégie avant, mais ne peuvent plus se parler le moment venu de l'épreuve.

Le premier prisonnier rentre dans la pièce, regarde le contenu de toutes les boîtes et, s'il le désire, il inverse le contenu de deux boîtes (mais seulement deux). Le deuxième prisonnier rentre alors dans la pièce (le premier est sorti), les gardiens de la prison lui assignent un numéro (aléatoirement) entre 1 et 50, et il doit trouver ce numéro en ouvrant au maximum 25 boîtes.

S'il trouve le numéro qui lui a été donné, les deux prisonniers sont sauvés, sinon les deux sont exécutés. Encore une fois, le problème défie l'entendement, car on a du mal à comprendre la stratégie que pourrait adopter le premier prisonnier sans avoir connaissance du numéro qui va être attribué au second.

Pourtant, s'ils sont malins, les deux prisonniers sont certains d'être sauvés. Comment font-ils ?

Envoyez vos réponses à jean-paul.delahaye@univ-lille1.fr. Le nom des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.