La deux-centième décimale

Jean-Paul Delahaye [1]

La rubrique « Récréation informatique » propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

Deux prisonniers très malins

Deux prisonniers sont soumis à une épreuve. Dans une pièce se trouve une grande table et sur la table sont posées 50 boîtes fermées contenant des cartes numérotées de 1 à 50. Il y a une carte pour chaque numéro de 1 à 50 et chaque boîte contient une carte. La distribution des cartes dans les boîtes a été faite aléatoirement et elle est inconnue des prisonniers. Les deux prisonniers peuvent convenir d'une stratégie avant, mais ne peuvent plus se parler le moment venu de l'épreuve. Le premier prisonnier rentre dans la pièce, regarde le contenu de toutes les boîtes et, s'il le désire, il inverse le contenu de deux boîtes (mais seulement deux). Le deuxième prisonnier entre alors dans la pièce (le premier est sorti), les gardiens de la prison lui assignent un numéro (aléatoirement) entre 1 et 50, et il doit trouver ce numéro en ouvrant au maximum 25 boîtes. S'il trouve le numéro qui lui a été donné, les deux prisonniers sont libérés, sinon, ils sont exécutés. Le problème semble défier l'entendement, car on a du mal à comprendre la stratégie que pourrait adopter le premier prisonnier sans avoir

1. Université de Lille 1, Sciences et Technologies, Centre de recherche en informatique signal et automatique de Lille (CRIStAL), UMR 9189 CNRS, Bât M3-ext, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex. E-mail : jean-paul.delahaye@univ-lille1.fr.

connaissance du numéro qui va être attribué au second. Pourtant, s'ils sont malins, les deux prisonniers sont certains d'être libérés. Comment font-ils ?

SOLUTION.

Merci et bravo à Emmanuel Lazard, Léo Noël-Baron et Pierre Gueth qui m'ont fait parvenir la solution.

Le premier prisonnier qui a une connaissance complète de la permutation f définie par la disposition des cartes dans les boîtes (la boîte i contient la carte $f(i)$) examine ses cycles. Si tous ont 25 éléments ou moins, il ne fait rien. Si l'un des cycles possède 26 éléments ou plus (il ne peut exister au plus qu'un seul tel cycle), il va le casser. Pour cela, il prend un élément du cycle, par exemple 1, et suit les cartes comme quand on applique la stratégie « suivre » (on ouvre une boîte, on regarde le numéro de la carte qu'elle contient, on va ouvrir la boîte correspondant à ce numéro, on regarde le numéro de la carte qu'elle contient, etc.). Il va donc à la boîte 1, puis à la boîte $f(1)$, puis à la boîte $f(f(1))$, etc. Il repère la 25^{e} boîte du cycle, puis il continue jusqu'à trouver la carte 1 dans la boîte qu'il trouve en ouvrant la k-ième boîte ($k > 25$) du cycle. Il échange les cartes de la 25^{e} boîte ouverte et de la boîte ouverte la k-ième fois. En faisant cela, le cycle auquel appartient 1 a maintenant pour longueur 25 car la 25^{e} boîte ramène en 1. La permutation obtenue après l'échange des cartes n'a donc aucun cycle de taille plus grande que 25. Le prisonnier 2, en appliquant la stratégie « suivre » à partir de la boîte k sera donc certain de trouver la carte k, qu'on lui aura demandée, cela quel que soit k.

Pour des variantes et plus de détails sur ce type de problèmes voir : Jean-Paul Delahaye, Des stratégies miraculeuses, *Pour la science*, pp. 78–83, juillet 2016, `http://cristal.univ-lille.fr/~jdelahay/pls/2016/272.pdf`

Le problème 1 posé dans l'encadré de la page 82 de cet article est pour l'instant resté sans solution.

Nouveau problème

LA DEUX-CENTIÈME DÉCIMALE

Ce problème doit être résolu sans utiliser d'ordinateur (qui de toute façon ne vous fournirait pas de preuve de ce que vous pourriez trouver) et peut l'être de tête.

Déterminer le 200^{e} chiffre décimal après la virgule du nombre $(1+\sqrt{2})^{1000}$.

Envoyez vos réponses à jean-paul.delahaye@univ-lille1.fr. Le nom des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.