Les mathématiques à rebours de théorèmes de type Ramsey

Ludovic Patey [1]

Accessit du prix de thèse Gilles Kahn 2016

Ludovic Patey a soutenu sa thèse [2] en février 2016 à l'université Paris Diderot (Paris-VII), sous la direction de Laurent Bienvenu et Hugo Herbelin au sein de l'Institut de recherche en informatique fondamentale (IRIF). Il effectue actuellement un post-doctorat à l'université de Californie, Berkeley.

En mathématiques, il est commun de parler de *théorèmes* sans préciser la théorie sous-jacente. Le mathématicien, interrogé, balayera la question en affirmant que dans la pratique, on se place implicitement dans la théorie des ensembles avec l'*axiomatique de Zermelo-Fraenkel* (ZF). Cependant, cette convention a tendance à faire oublier un fait fondamental : les théorèmes ne sont pas des vérités absolues. Leur validité dépend de celle des axiomes de la théorie. Si l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel est de nos jours largement acceptée par la communauté, le choix des axiomes pour les mathématiques a été sujet à de grandes controverses, notamment lors de la fameuse *crise des fondements* de la fin du XVIII^{e} siècle. En outre, Gödel [2] a montré en 1931, à travers ses *théorèmes d'incomplétude,* que la démarche de trouver de nouveaux axiomes pour compléter les mathématiques

1. https://ludovicpatey.com/
2. Consultable à l'adresse http://ludovicpatey.com/media/research/phd-thesis.pdf

était vouée à ne jamais se terminer. En effet, il restera toujours des énoncés mathématiques ni prouvables, ni infirmables. Ainsi, non seulement tout l'édifice des mathématiques repose sur la validité des axiomes, mais en plus il nous en manque... Quelles garanties avons-nous de la validité de nos axiomes ? Et puis pourquoi ces axiomes plutôt que d'autres ? Est-ce que choisir l'axiomatique de la théorie des ensembles est un acte de foi ?

Les mathématiques à rebours [7] sont un grand programme cherchant à apporter des réponses à la question des fondements des mathématiques. Le raisonnement est le suivant : après tout, peu importe qu'il existe des énoncés indécidables. Les mathématiques auxquelles la société s'intéresse forment un sous-ensemble très restreint de l'univers des possibles. On veut surtout des garanties sur les théorèmes du cœur des mathématiques, ceux que l'on apprend au lycée, que l'on utilise en entreprise, et non pas quelqu'obscur résultat de théorie des ensembles sous l'hypothèse de grands cardinaux. De quels axiomes a-t-on vraiment besoin pour prouver les théorèmes de la vie de tous les jours ? Les mathématiques à rebours cherchent donc à classifier les théorèmes en fonction des axiomes qui leur sont nécessaires.

Comment procède-t-on ? Prenons un théorème T. Pour trouver les axiomes nécessaires à T, la première étape consiste à analyser la preuve du théorème pour en extraire les hypothèses. Parfois, il faut chercher de nouvelles preuves plus élémentaires afin de trouver les axiomes les plus faibles possibles. Mais comment savoir, une fois les axiomes $A_1, \dots, A_n$ obtenus, qu'ils sont vraiment *nécessaires* ? L'idée est alors de montrer que le théorème T contient déjà l'information des axiomes dans son énoncé, au sens où le théorème prouve les axiomes. Cette démarche inversée donne son nom aux *mathématiques à rebours*.

Depuis la fondation du domaine en 1976 par Friedman et Simpson, des milliers de théorèmes ont été analysés, et deux grandes observations surprenantes ont été faites : tout d'abord, la grande majorité [3] des théorèmes « ordinaires » ne nécessite que des axiomes calculatoirement très faibles. En particulier, les énoncés finis prouvables par les mathématiques infinitaires le sont déjà par des méthodes finitaires, ce qui justifie notamment l'utilisation de l'infini en mathématiques. En effet, l'infini peut être perçu comme un outil permettant de prouver de manière plus simple des propriétés sur les objets finis [6]. La seconde observation est que les mathématiques sont très structurées, au sens où la grande majorité des théorèmes est équivalente à cinq grands ensembles d'axiomes. Cette seconde observation soulève de nouvelles questions, notamment de savoir si cette apparente structure des mathématiques reflète un biais humain dans l'exploration des concepts, ou s'il existe un phénomène plus profond qu'il convient d'analyser.

Cependant, quelques théorèmes provenant de la théorie de Ramsey échappent à cette observation de structure. Informellement, cette théorie nous dit qu'étant donné

3. Au moins 85 % des mathématiques selon les estimations de Simpson [5].

une suffisament grande collection d'objets, il est toujours possible d'obtenir une sous-collection arbitrairement grande qui satisfera certaines propriétés structurelles. L'exemple le plus connu est le *théorème de Ramsey*, qui énonce que pour toute coloration finie des n-uplets d'entiers naturels, il existe un ensemble infini d'entiers tel que tous les n-uplets sur cet ensemble ont la même couleur. L'étude des axiomes nécessaires au théorème de Ramsey ainsi que de ses conséquences s'est avérée surprenamment compliquée [4, 1], et constitue à elle seule un pan entier des mathématiques à rebours modernes [3].

Afin de mieux comprendre ce phénomène de la théorie de Ramsey, la communauté a dû développer une grande variété d'outils inspirés de la théorie des ensembles, de la théorie de la preuve, et de la calculabilité. Au cours de cette thèse, nous avons unifié les méthodes d'analyse des variantes du théorème de Ramsey en une méthodologie générale, permettant notamment d'extraire des informations calculatoires sur les théorèmes. Nous avons montré, à travers ces techniques, le caractères chaotique de la théorie de Ramsey du point de vue des mathématiques à rebours. Beaucoup de questions subsistent cependant, et l'analyse de la théorie de Ramsey est loin d'être terminée...

Références

[1] Peter A. Cholak, Carl G. Jockusch, and Theodore A. Slaman. On the strength of Ramsey's theorem for pairs. *Journal of Symbolic Logic*, 66(01) :1–55, 2001.

[2] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatsh. Math. Phys.*, 38(1) :173–198, 1931.

[3] Denis R. Hirschfeldt. *Slicing the truth*, volume 28 of *Lecture Notes Series. Institute for Mathematical Sciences. National University of Singapore*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2015. On the computable and reverse mathematics of combinatorial principles, Edited and with a foreword by Chitat Chong, Qi Feng, Theodore A. Slaman, W. Hugh Woodin and Yue Yang.

[4] David Seetapun and Theodore A. Slaman. On the strength of Ramsey's theorem. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 36(4) :570–582, 1995.

[5] S. G. Simpson. Foundations of mathematics : an optimistic message. Available at http ://www.personal.psu.edu/t20/talks/nus1601/talk.pdf, 01 2016.

[6] Stephen G. Simpson. Partial realizations of Hilbert's Program. *J. Symbolic Logic*, 53(2) :349–363, 1988.

[7] Stephen G. Simpson. *Subsystems of Second Order Arithmetic*. Cambridge University Press, 2009.