



Carré magique impossible ?

Jean-Paul Delahaye¹

La rubrique « Récréation informatique » propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

LA DEUX-CENTIÈME DÉCIMALE

Déterminer le 200^e chiffre décimal après la virgule du nombre $(1 + \sqrt{2})^{1000}$. Ce problème doit être résolu de tête, sans ordinateur, sans smartphone, sans papier.

SOLUTION.

Merci à Paul Zimmermann, David Renault, Eric Angel, Jean-Marc Delosme et Jean-Christophe Janodet pour leurs solutions.

$(1 + \sqrt{2})^{1000} + (1 - \sqrt{2})^{1000}$ est un entier, car quand on développe, tous les termes comportant $\sqrt{2}$ s'annulent comme cela se passe pour :

$$(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 6.$$

1. Université de Lille 1, Sciences et Technologies, Centre de recherche en informatique signal et automatique de Lille (CRISAL), UMR 9189 CNRS, Bât M3-ext, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex.
E-mail : jean-paul.delahaye@univ-lille1.fr.

Or, $(1 - \sqrt{2})^{1000}$ est très petit puisque c'est un nombre inférieur à $1/2$ élevé à la puissance 1000. Précisément, en utilisant que $2^{10} = 1024$ (Tiens, tiens... (N.D.E.)), on voit qu'il est inférieur à :

$$\frac{1}{2^{1000}} = \frac{1}{1024^{100}} < \frac{1}{(10^3)^{100}} = \frac{1}{10^{300}}.$$

Le nombre de l'énoncé est donc la différence entre un entier et un nombre plus petit que 0,000...0001 avec 300 zéros. Tous ses chiffres entre la virgule et le 300^e chiffre après la virgule sont donc '9'.

Ce problème provient d'une rubrique de problèmes de Elwyn Berlekamp et Joe Buhler parue dans le numéro d'automne 1999 du journal *Emissary* qui est le journal du MRS (*Mathematical Research Institute*) de Berkeley aux États-Unis.

Nouveau problème

CARRÉ MAGIQUE IMPOSSIBLE ?

Dans le dessin de ce célèbre carré magique, chaque alignement de trois pastilles contenant des nombres donne un total de 15. Il y a huit alignements possibles : trois horizontaux, trois verticaux, et deux diagonaux. L'énigme paradoxale inventée par Lee Sallows est la suivante : repositionner les pastilles, en plaçant toujours une pastille dans chaque case du tableau 3×3 , de manière à ce qu'il y ait toujours huit alignements de trois pastilles, chacun donnant un total que cette fois on veut égal à 16.

⑧	①	⑥
③	⑤	⑦
④	⑨	②

La chose paraît impossible, puisqu'il semble que si c'est faisable avec une somme de 15, on ne peut certainement pas le faire avec une somme plus grande. Il y a pourtant une solution... et même plusieurs. Il n'y a aucune entourloupe, mais il faut remarquer qu'on ne dit pas que les pastilles doivent se trouver au centre de chaque case.

Envoyez vos réponses à jean-paul.delahaye@univ-lille1.fr. Le nom des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.