Les chapeaux de l'icosaèdre

Jean-Paul Delahaye [1]

La rubrique « Récréation informatique » propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

Carré magique impossible ?

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Dans le dessin de ce célèbre carré magique, chaque alignement de trois pastilles contenant des nombres donne un total de 15. Il y a huit alignements possibles : trois horizontaux, trois verticaux, et deux diagonaux. L'énigme paradoxale inventée par Le Sallows est la suivante : repositionner les pastilles, en plaçant toujours une pastille dans chaque case du tableau 3×3, de manière à ce qu'il y ait toujours huit alignements de trois pastilles, chacun donnant un total que cette fois on veut égal à 16.

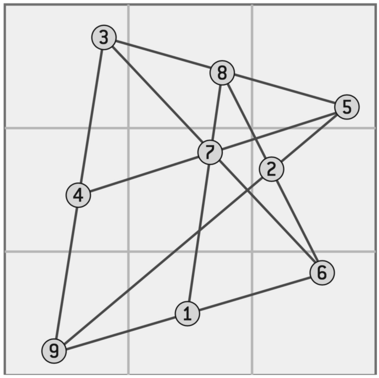
La chose paraît impossible, puisqu'il semble que si c'est faisable avec une somme de 15, on ne peut certainement pas

1. Université de Lille 1, Sciences et Technologies, Centre de recherche en informatique signal et automatique de Lille (CRIStAL), UMR 9189 CNRS, Bât M3-ext, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex.
E-mail : jean-paul.delahaye@univ-lille1.fr.

le faire avec une somme plus grande. Il y a pourtant une solution... et même plusieurs. Il n'y a aucune entourloupe, mais il faut remarquer qu'on ne dit pas que les pastilles doivent se trouver au centre de chaque case.

SOLUTION.

Déplacer le centre des pastilles était suggéré. La solution de Lee Sallows est donnée ci-contre.



François Lemaire, du laboratoire CRISTAL de l'université de Lille (`http://www.lifl.fr/~lemaire/homepage/index.php`), a étudié le problème. Il a trouvé 23 solutions. Je cite maintenant le petit article où il décrit rapidement sa méthode qui est numérique.

« Les cases font chacune une largeur de 1. Si les pions sont à une distance de 0.00001 au moins de chaque bord, alors on trouve 23 solutions. Si la distance est de 0.001, on trouve 20 solutions. Si la distance est de 0.04, on trouve 18 solutions. Il n'y a aucune garantie d'avoir trouvé toutes les solutions. Après avoir retiré toutes les symétries, et les cas impossibles, il en reste au plus 82. C'est sur ces 82 qu'on en trouve 23. La méthode est numérique, et consiste à aligner chaque triplet de nombres par un mécanisme de type ressort : chaque triplet s'aligne progressivement au cours du temps (un peu comme l'intégration d'une équation différentielle), et on s'arrête quand les alignements sont quasi parfaits. Important : il faudrait vérifier que chaque solution est bien correcte en passant par les rationnels. »

Je tiens à la disposition de ceux qui le souhaite son document. Pour avoir une réponse définitive sur le nombre de solutions, il faudrait encore approfondir le sujet.

Nouveau problème

LES CHAPEAUX DE L'ICOSAÈDRE

L'icosaèdre est un des cinq polyèdres réguliers de Platon (pour chacun d'eux, chaque face est un même polygone régulier, et tous les sommets ont exactement la même forme). L'icosaèdre est le polyèdre composé de 20 triangles équilatéraux assemblés comme indiqué page suivante.

À un sommet de l'icosaèdre se rejoignent cinq triangles équilatéraux. Si on considère uniquement ces cinq triangles, cela constitue une sorte de chapeau. La question posée est :

Combien faut-il de tels chapeaux (chacun placé pour s'ajuster à cinq faces de l'icosaèdre) au minimum pour recouvrir l'icosaèdre ?

Comme il y a 20 faces et que chaque chapeau est fait de cinq triangles équilatéraux, il faut au moins quatre chapeaux pour recouvrir l'icosaèdre. Mais est-ce que quatre chapeaux peuvent réussir ce recouvrement ? Si quatre ne suffisent pas, est-ce que cinq suffisent ? Si cinq ne suffisent pas est-ce que six suffisent ? etc.

On peut bien sûr concevoir un programme qui énumère tous les choix possibles avec quatre, puis cinq, puis six chapeaux, etc., jusqu'à trouver une solution. Mais comment raisonner pour éviter d'avoir à utiliser son ordinateur ?

Envoyez vos réponses à jean-paul.delahaye@univ-lille1.fr. Le nom des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.