Rigidifier une grille

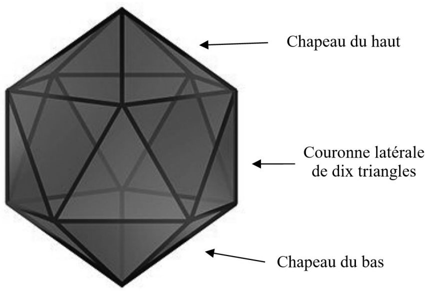
Jean-Paul Delahaye [1]

La rubrique « Récréation informatique » propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

Les chapeaux de l'icosaèdre

L'icosaèdre est un des cinq polyèdres réguliers de Platon (pour chacun d'eux, chaque face est un même polygone régulier, et tous les sommets ont exactement la même forme). L'icosaèdre est le polyèdre composé de 20 triangles équilatéraux assemblés comme indiqué ci-contre.



À un sommet de l'icosaèdre se rejoignent cinq triangles équilatéraux. Si on considère uniquement ces cinq triangles, cela constitue une sorte de chapeau.

1. Université de Lille, Sciences et Technologies, Centre de recherche en informatique signal et automatique de Lille (CRIStAL), UMR 9189 CNRS, Bât M3-ext, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex.
E-mail : jean-paul.delahaye@univ-lille1.fr.

La question posée est :

Combien faut-il de tels chapeaux (chacun placé pour s'ajuster à cinq faces de l'icosaèdre) au minimum pour recouvrir l'icosaèdre ?

Comme il y a 20 faces et que chaque chapeau est fait de cinq triangles équilatéraux, il faut au moins quatre chapeaux pour recouvrir l'icosaèdre. Mais est-ce que quatre chapeaux peuvent réussir ce recouvrement ? Si quatre ne suffisent pas, est-ce que cinq suffisent ? Si cinq ne suffisent pas est-ce que six suffisent ? etc.

On peut bien sûr concevoir un programme qui énumère tous les choix possibles avec quatre, puis cinq, puis six chapeaux, etc., jusqu'à trouver une solution. Mais comment raisonner pour éviter d'avoir à utiliser son ordinateur ?

SOLUTION.

Merci à Daniel Goffinet pour sa solution.

La réponse est que cinq chapeaux de cinq triangles équilatéraux collés ne suffisent pas à couvrir l'icosaèdre et que six permettent le recouvrement.

Nous utiliserons la terminologie suivante (voir le dessin de la page précédente) :

— *chapeau des cinq triangles du hau*t ;
— *chapeau des cinq triangles du bas* ;
— *couronne latérale de 10 triangles* (quand on enlève les chapeaux du haut et du bas) ;
— *les cinq pétales du haut* : les cinq triangles adjacents au chapeau du haut ; ils constituent la moitié de la couronne latérale.
— *les cinq pétales du bas* : les cinq triangles adjacents au chapeau du bas.

Montrons tout d'abord que cinq chapeaux ne suffisent pas. On tente de placer cinq chapeaux.

Pour des raisons de symétrie, on peut supposer qu'un des cinq chapeaux est placé sur le chapeau du haut.

Si on place un deuxième chapeau sur le chapeau du bas, les 10 triangles de la couronne latérale ne seront pas couverts et ne pourront pas être couverts par trois chapeaux de plus, car un chapeau ne peut couvrir que trois triangles à la fois de la couronne latérale au plus. Donc s'il existe un recouvrement avec cinq chapeaux dont l'un des chapeaux est celui du haut, il ne comportera pas de chapeau sur le chapeau du bas.

Pour placer les quatre chapeaux disponibles, il y a 10 positions possibles pour positionner leur centre : les cinq pointes du chapeau du haut, et les cinq pointes du chapeau du bas.

Il y aura au moins un chapeau dont le centre sera une des cinq pointes du chapeau du haut. En effet s'il n'y en avait pas, les quatre chapeaux (en plus de celui déjà placé en haut) ne pourraient pas recouvrir les cinq pétales du haut car un chapeau dont le centre occupe une pointe du chapeau du bas ne couvre qu'un seul des cinq pétales du haut.

Il y aura donc au plus trois chapeaux dont les centres seront sur les pointes du chapeau du bas.

Il y aura au moins trois chapeaux dont les centres seront parmi les cinq pointes du chapeau du bas : en effet, il faut couvrir les cinq triangles du chapeau du bas et on ne peut en couvrir que deux à la fois (puisqu'on s'interdit de mettre un chapeau à la place du chapeau du bas), et que seuls les chapeaux dont le centre est placé sur les pointes du chapeau du bas couvrent les triangles du chapeau du bas.

Considérons ces trois chapeaux dont les centres occupent les pointes du chapeau du bas. Leurs centres ne peuvent pas occuper trois pointes consécutives du chapeau du bas (car alors le chapeau du bas ne serait pas couvert entièrement). Donc elles occupent des positions espacées de 1, 2, 2 (aux symétries près, c'est la seule disposition possible).

Quand le chapeau du haut est placé, ainsi que les trois chapeaux sur les pointes du chapeau du bas avec leurs centres espacés de 1, 2, 2, il reste deux triangles non couverts (à cause des espacements de 2) parmi les cinq pétales du haut. Ils ne peuvent pas être couverts pas un seul chapeau car ils sont trop éloignés l'un de l'autre.

On ne peut donc pas couvrir l'icosaèdre avec cinq chapeaux.

Montrons maintenant que six chapeaux suffisent. On procède comme dans le raisonnement précédent et on positionne deux chapeaux pour recouvrir les deux triangles non couverts quand les quatre premiers chapeaux sont placés.

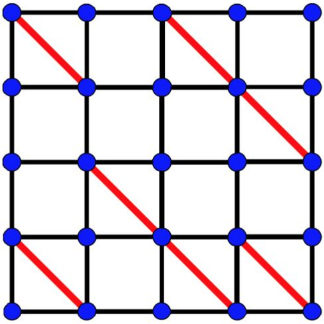
Un autre recouvrement à six chapeaux est plus symétrique : un chapeau sur le sommet en haut et cinq sur les cinq pointes du chapeau du bas.

Nouveau problème

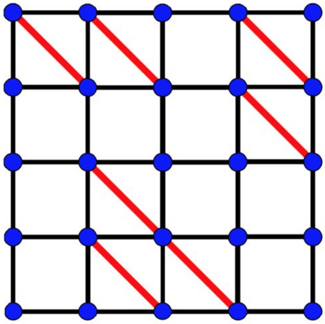
Rigidifier une grille

Le dessin de la page suivante montre deux grilles composées chacune de barres de même longueur qui se rejoignent en des points d'articulation non rigides (par exemple des barres de Meccano® liées aux points d'articulation par des vis d'axe perpendiculaire au plan du dessin).

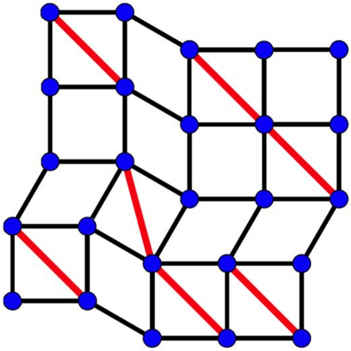
Quelques barres transversales ont été ajoutées. La première grille n'est pas rigide et se déforme comme le montre le troisième dessin. La seconde est rigide (si vous en doutez, prenez votre Meccano®). Comment, sans avoir à construire de tels assemblages, reconnaître que des barres transversales rigidifient une grille rectangulaire de ce type de *a* barres en largeur et de *b* barres en hauteur ? Combien faut-il au minimum de barres transversales ?



A



B



A

Envoyez vos réponses à jean-paul.delahaye@univ-lille1.fr. Le nom des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.