Dynamiques majoritaires dans les graphes

Jean-Paul Delahaye [1]

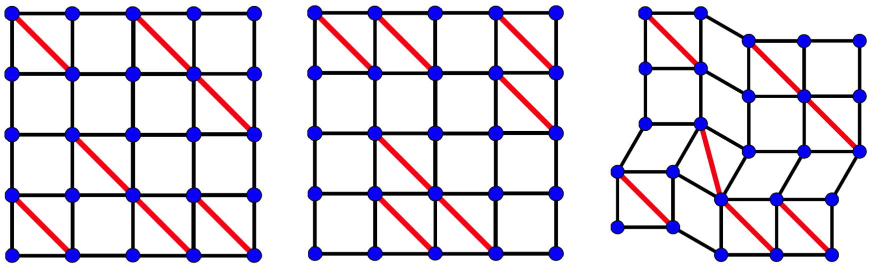
La rubrique « Récréation informatique » propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

Rigidifier une grille

Voici deux grilles (figures 1(a) à 1(b)) composées chacune de barres de même longueur qui se rejoignent en des points d'articulation non rigides (par exemple des barres de Meccano®) liées aux points d'articulation par des vis d'axe perpendiculaire au plan du dessin). Quelques barres transversales ont été ajoutées. La grille de la figure 1(a) n'est pas rigide et se déforme comme le montre la figure 1(c). La grille de la figure 1(b) est rigide. Si vous en doutez, prenez votre Meccano®. Comment, sans avoir à construire de tels assemblages, reconnaître que des barres transversales rigidifient une grille rectangulaire de ce type de *a* barres en largeur et de *b* barres en hauteur ? Combien faut-il au minimum de barres transversales ?

1. Université de Lille, Centre de recherche en informatique signal et automatique de Lille (CRIStAL), UMR 9189 CNRS, Bât M3-ext, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex.
E-mail : jean-paul.delahaye@univ-lille.fr.



(a) (b) (c)

FIGURE 1.

SOLUTION.

Réfléchissons aux contraintes de parallélisme qui s'imposent aux barres. Considérons un réseau composé de 16 carrés comme celui de la figure 2. La mécanique de l'assemblage indique qu'il existe huit séries de cinq tringles telles que dans chaque série toutes les barres sont nécessairement parallèles, qu'on y ait ajouté des tringles obliques ou non. En effet, quand le réseau se déforme, les carrés restent des carrés ou deviennent des losanges, donc des parallélogrammes. Cela signifie que leurs côtés opposés sont et seront toujours parallèles. De proche en proche dans une même ligne ou une même colonne, ces contraintes de parallélisme des tringles déterminent huit groupes de cinq tringles. L'un de ces groupes de cinq tringles toujours parallèles est dessiné en rouge sur la figure 2. Un autre est dessiné en vert. En prenant en compte toutes ces contraintes de parallélisme on obtient huit groupes de cinq tringles. Ce sont d'une part

(1) les cinq tringles en rouge au-dessus de la tringle x_1 ;
(2) les cinq tringles horizontales au-dessus de x_2 ;
(3) celles au-dessus de x_3 ;
(4) celles au-dessus de x_4.

Les tringles verticales se regroupent en quatre groupes de cinq :

(5) celles à la même hauteur que y_1 ;
(6) celles à la même hauteur que y_2 ;
(7) celles (en vert) à la même hauteur que y_3 ; et
(8) celles à la même hauteur que y_4.

Nous désignerons ces huit groupes de cinq tringles par le nom de la tringle « maîtresse » en bas, ou à droite. Les huit groupes sont donc x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 et y_4.

Remarquons maintenant qu'à chaque fois qu'on introduit une tringle transversale, on oblige deux tringles de groupes différents à être orthogonales, et donc toutes les tringles d'un groupe à être orthogonales à toutes les tringles d'un autre groupe. Par

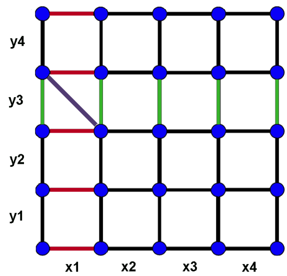


FIGURE 2.

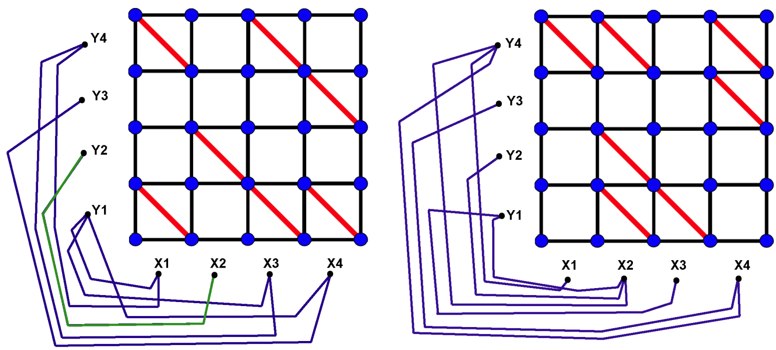


FIGURE 3.

exemple, en introduisant une tringle transversale dans la colonne de x_1 et dans la ligne de y_3 (figure 2 en gris), on oblige les cinq tringles de x_1 (en rouge) à rester orthogonales aux cinq tringles de y_3 (en vert). Quand plusieurs tringles transversales sont insérées dans le réseau, pour faire le bilan de contraintes d'orthogonalité créées, il suffit de dessiner un graphe dont les nœuds sont les huit groupes x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 et dont les arcs sont ceux correspondant aux tringles transversales établissant des contraintes comme nous l'avons vu avec x_1 et y_3. Les graphes associés aux deux grilles 4×4 de la figure 1 sont dessinés sur la figure 3.

Dans de tels graphes, si deux groupes de tringles sont reliés par un chemin, cela signifie qu'ils sont rigidement associés. Si ce sont deux groupes de tringles horizontales (ou deux groupes de tringles verticales), c'est que les tringles des deux groupes sont toutes parallèles. Si l'un des deux groupes est horizontal et l'autre vertical, c'est que chaque tringle de l'un des groupes est orthogonale à chaque tringle de l'autre.

Pour que le réseau soit rigide, il suffit donc que tous les nœuds du graphe soient reliés entre eux, c'est-à-dire que le graphe associé au réseau soit « d'un seul tenant », ou, dit dans le langage de la théorie des graphes, soit « connexe ». La réciproque est vraie aussi, comme cela a été établi par les mathématiciens Ethan Bolker et Henry Crapo en 1979 [1]. Finalement, pour savoir si un réseau de ce type est rigide, il faut et il suffit que le graphe associé aux familles de tringles (les x_i et les y_i) soit connexe. On peut alors assez facilement répondre à la question « combien faut-il au minimum de tringles obliques pour rigidifier un réseau rectangulaire de a carrés de large et de b carrés de haut ? ». Le graphe associé à la grille possède $a+b$ nœuds que l'on peut joindre pour former un graphe connexe en utilisant $a+b-1$ arcs. Par exemple en joignant :

$$x_1 - y_1, x_1 - y_2, ..., x_1 - y_b \text{ et } x_2 - y_1, x_3 - y_1, ..., x_a - y_1.$$

Il est impossible de rendre le graphe connexe en utilisant moins de $a+b-1$ arcs car on montre facilement qu'un graphe connexe de k nœuds comporte au moins $k-1$ arcs. Il est amusant de noter que même si une tringle transversale est présente dans chaque colonne et dans chaque ligne, la grille n'est pas nécessairement rigide. Mieux, il se peut que deux tringles soient présentes dans chaque ligne et dans chaque colonne et que pourtant la grille ne soit pas rigide (cf. figure 4).

Nouveau problème

DYNAMIQUES MAJORITAIRES DANS LES GRAPHES

Considérons un graphe non orienté et sans boucle définissant la relation symétrique « est une connaissance de » entre les membres d'une communauté (finie). Une décision doit être prise concernant la communauté, par exemple « faut-il rendre l'enseignement du Python obligatoire dès la sixième ? ». Chaque personne a un avis, OUI ou NON. Cela définit un premier état du graphe. Plutôt que de compter le nombre de OUI et de NON, chaque membre de la communauté décide d'adopter l'avis majoritaire de ses connaissances. En cas d'égalité entre les OUI et les NON, un membre de la communauté ne change pas d'avis. Cela conduit à un second état du graphe. L'opération est recommencée, conduisant à un troisième état du graphe, et ainsi de suite...

Un théorème fascinant de théorie des graphes, dû à Eric Goles et Jorge Olivos [3, 4], indique que les changements d'états du graphe ne peuvent engendrer que deux situations :

— soit cela se stabilise (plus aucun changement d'avis d'un état au suivant),

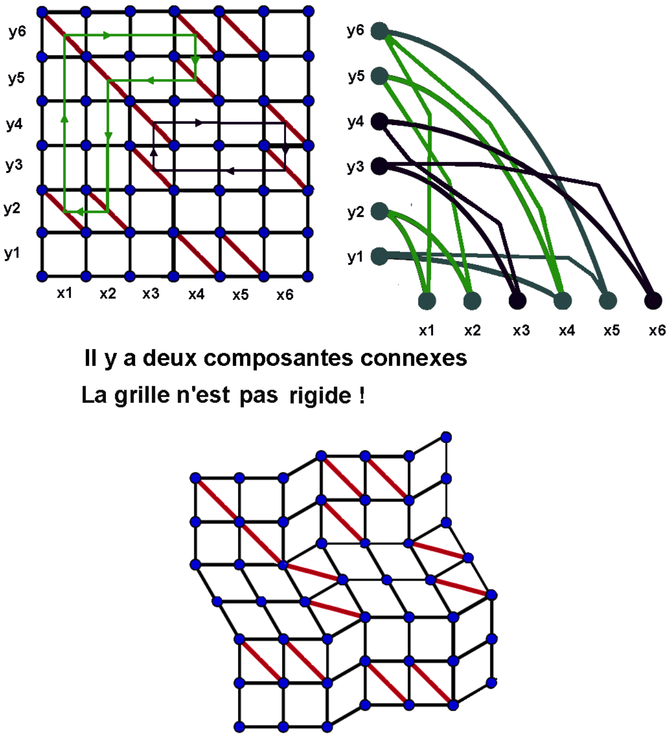


FIGURE 4.

— soit on tombe sur un cycle d'ordre 2 : il y a deux états possibles du graphe, E_1 et E_2, tels que E_1 donne E_2 et E_2 donne E_1.

Deux questions sont posées au sujet de ces dynamiques majoritaires.

— Est-ce que le résultat de Goles et Olivos reste vrai quant on accepte des graphes ayant une infinité de nœuds ?

— Si un des nœuds (et un seul), au lieu de changer son choix pour le choix majoritaire de ses connaissances, choisit à chaque étape d'adopter le choix minoritaire de ses connaissances, se peut-il qu'on tombe sur autre chose que sur une stabilisation ou sur un cycle d'ordre 2 ?

Envoyez vos réponses à jean-paul.delahaye@univ-lille.fr. Le nom des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.

Références

[1] E. Bolker, H. Crapo. Bracing Rectangular Frameworks I. *SIAM J. Appl. Math.* 36:3, 473–490, 1979.

[2] J.-P. Delahaye Ces grilles de tiges articulées sont-elles rigides ? *Pour la science*, août 2018, pp. 80–85, 2018. [http://cristal.univ-lille.fr/~jdelahay/pls/2018/300.pdf]

[3] E. Goles, J. Olivos. Periodic behaviour of generalized threshold functions. *Discrete mathematics*, 30:2, pp. 187–189, 1980.

[4] E. Goles, J. Olivos. Comportement périodique des fonctions à seuil binaires et applications. *Discrete Applied Mathematics* 3:2, 93–105, 1981.