La file de chapeaux

Jean-Paul Delahaye [1]

La rubrique « Récréation informatique » propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

La carte d'embarquement perdue ?

Les cent passagers du vol Paris-Madrid se présentent en file à la porte de l'avion un à un. Il y a exactement cent places dans l'avion. Le premier ne trouve plus sa carte d'embarquement et va s'assoir à une place au hasard. Les autres ou bien trouvent leur place libre et l'occupent ou bien, si elle occupée, vont s'assoir à une place au hasard parmi les places libres. Quelle est la probabilité pour que le dernier passager à entrer dans l'avion puisse s'assoir à la place qu'indique sa carte d'embarquement ?

Solution. Merci à Louis Rousselet, Eric Wegrzynowski, Elie Cattan et Marc Filippi qui m'ont fait parvenir la réponse à ce problème... pas si facile.

1. Professeur émérite, université de Lille, campus scientifique, CRIStAL UMR CNRS, 9189 Centre de recherche en informatique signal et automatique de Lille, bâtiment ESPRIT, 59655, Villeneuve d'Ascq Cedex France. E-mail : jean-paul.delahaye@univ-lille.fr.

1024 – Bulletin de la Société informatique de France, numéro 15, avril 2020, pp. 157–160

Point 1. Quand le dernier voyageur cherche sa place, il n'y a que deux possibilités : soit la dernière place libre est la sienne, soit c'est celle du premier voyageur. En effet, considérons un voyageur dont la place est X et qui n'est ni le premier voyageur de la file d'entrée, ni le dernier. Quand le tour de ce voyageur arrive, soit la place X est libre et alors, il l'occupe, soit elle est occupée et il va ailleurs. Dans aucun cas la place X ne sera donc encore libre quand le dernier voyageur se présentera. Donc, quand le dernier voyageur se présente, toutes les places des voyageurs autres que le premier et le dernier sont occupées, et donc seules restent susceptible d'être libres la sienne et celle du premier voyageur.

Point 2. Quand la file avance, à chaque nouveau voyageur il peut se produire deux situations :

— Sa place est libre, il l'occupe ;

— Sa place est occupée et alors il va occuper une des k places libres au hasard (donc pour chacune avec une probabilité $\frac{1}{k}$). Si l'une des places du premier ou du dernier est occupée, il n'occupera pas l'autre (sinon on aurait une contradiction avec le point 1). Si aucune des places du premier ou du dernier n'est occupée, il pourra alors l'occuper mais chacune a la même probabilité d'être prise ($\frac{1}{k}$). Ceci est vrai à chaque étape, donc les places du premier et du dernier sont toujours dans une situation équivalente et donc elles ont au total la même probabilité d'être occupée quand le dernier passager cherche sa place, et cette probabilité est donc $\frac{1}{2}$, ce qui signifie aussi que le dernier passager a une chance sur deux de trouver sa place libre.

Une généralisation intéressante du problème est possible. Considérons l'avant-dernier passager. Quand il arrive à sa place, seules deux parmi les trois places du premier, du dernier et la sienne sont susceptibles d'être libres (même raisonnement qu'au point 1). En raisonnant comme pour le point 2, on trouve qu'il y a une parfaite symétrie entre ces trois places tant que l'avant-dernier passager n'est pas passé et donc l'avant-dernier passager a une chance sur trois de trouver sa place occupée.

De la même façon le passager se présentant le $(100-p)$-ième a une probabilité $\frac{1}{p+2}$ de trouver sa place occupée. Notons qu'on retrouve l'affirmation évidente que le passager se présentant en deuxième ($(100-98)$-ième) a une probabilité $\frac{1}{100}$ de trouver sa place occupée.

Nouveau problème

LA FILE DE CHAPEAUX

Un groupe de N étudiants est soumis à un test. L'arbitre leur explique qu'ils vont se mettre en rang les uns derrière les autres, tous tournés vers la gauche. L'arbitre posera sur leur tête un chapeau rouge ou bleu tiré au hasard avec équiprobabilité. L'étudiant le plus à droite pourra voir tous les chapeaux sauf le sien ; l'étudiant placé devant lui pourra voir tous les chapeaux sauf le sien et celui de l'étudiant placé derrière lui (le plus à droite).

Plus généralement, l'étudiant placé en position k à partir de la droite pourra voir tous les chapeaux des étudiants $k+1$, $k+2$, etc. jusqu'au dernier le plus à gauche, mais ne verra aucun autre chapeau. L'étudiant N, au bout à gauche, ne voit donc aucun chapeau.

L'arbitre interrogera chaque étudiant sur la couleur du chapeau qu'il porte et leur distribuera ensuite autant d'ordinateurs portables qu'ils auront donné de bonnes réponses. Ils s'arrangeront entre eux pour se les répartir.

Avant de se mettre en rang, les étudiants discutent entre eux et conviennent d'un système de réponses. Une fois les étudiants alignés, les chapeaux sont placés au hasard et ils ne peuvent plus avoir d'échanges.

Dernière précision : l'arbitre interroge à voix haute et les étudiants répondent à voix haute sur ce que chacun croit être la couleur de son chapeau. L'arbitre commence par l'étudiant le plus à droite et termine par celui le plus à gauche.

Analysons un instant le problème soumis aux étudiants. En répondant au hasard, ils gagneront en moyenne $\frac{N}{2}$ ordinateurs car une réponse sur deux au hasard sera juste à peu près. Les étudiants peuvent obtenir bien mieux s'ils conviennent entre eux de la méthode de jeu suivante :

— L'étudiant 1 (le plus à droite) répondra en donnant la couleur du chapeau de l'étudiant 2, qui connaîtra donc de manière certaine la couleur de son chapeau (puisqu'il entend ce que dit l'étudiant 1).

— L'étudiant 2 répétera ce que l'étudiant 1 aura proposé et gagnera donc.

— L'étudiant 3 répondra en donnant la couleur du chapeau de l'étudiant 4 qui connaîtra de manière certaine la couleur de son chapeau.

— L'étudiant 4 répétera ce que l'étudiant 3 aura proposé et gagnera donc.

— Et ainsi de suite pour les autres étudiants.

Cette façon de procéder assure les étudiants d'avoir au moins $\frac{N}{2}$ réponses exactes si N est pair et $\frac{N-1}{2}$ si N est impair. En moyenne, le nombre de réponses justes sera environ $\frac{3N}{4}$, car les étudiants de rang impair tomberont juste une fois sur deux environ.

C'est très bien, se disent les étudiants qui s'apprêtent à adopter cette tactique de jeu. Pourtant, l'un d'eux, Alonso, intervient et dit : « *Non, j'ai une autre idée, nous pouvons être certains de gagner* $N-1$ *ordinateurs au moins, et* N *ordinateurs une fois sur deux* ». Il semble impossible que les N étudiants puissent gagner de manière certaine $N-1$ ordinateurs et peut-être N ! Pourtant Alonso est un bon étudiant qui ne se trompe jamais.

Quelle est l'idée d'Alonso ? Autre question : la méthode d'Alonso s'adapte-t-elle au cas où la couleur du chapeau est possible non plus parmi deux couleurs, mais parmi k couleurs avec $k > 2$? Et s'il y a une infinité de couleurs ?

Envoyez vos réponses à jean-paul.delahaye@univ-lille.fr. Le nom des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.