Le système de règles Esperluette

Jean-Paul Delahaye [1]

La rubrique « Récréation informatique » propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

La file de chapeaux

Des étudiants au nombre de N sont soumis à un test. L'arbitre leur explique qu'ils vont se mettre en rang les uns derrière les autres, tous tournés vers la gauche. L'arbitre posera sur leur tête un chapeau rouge ou bleu tiré au hasard. L'étudiant le plus à droite pourra voir tous les chapeaux sauf le sien ; l'étudiant placé devant lui pourra voir tous les chapeaux sauf le sien et celui de l'étudiant placé derrière lui (le plus à droite). Plus généralement, l'étudiant placé en position k à partir de la droite pourra voir tous les chapeaux des étudiants $k+1, k+2$, etc. jusqu'au dernier le plus à gauche, mais ne verra aucun autre chapeau. L'étudiant N, au bout à gauche, ne voit donc aucun chapeau.

L'arbitre interrogera chaque étudiant sur la couleur du chapeau qu'il porte et leur distribuera ensuite autant d'ordinateurs portables qu'ils auront donnés de bonnes réponses. Ils s'arrangeront entre eux pour se les répartir.

1. Professeur émérite, université de Lille, campus scientifique, CRIStAL UMR CNRS, 9189 Centre de recherche en informatique signal et automatique de Lille, bâtiment ESPRIT, 59655, Villeneuve d'Ascq Cedex France. E-mail : jean-paul.delahaye@univ-lille.fr.

Avant de se mettre en rang, les étudiants discutent entre eux et conviennent d'un système de réponses. Une fois les étudiants alignés, les chapeaux sont placés au hasard et ils ne peuvent plus avoir d'échanges. Dernière précision : l'arbitre interroge à voix haute et les étudiants répondent à voix haute sur ce que chacun croit être la couleur de son chapeau. L'arbitre commence par l'étudiant le plus à droite et termine par celui le plus à gauche.

Analysons un instant le problème soumis aux étudiants. En répondant au hasard, ils gagneront en moyenne $\frac{N}{2}$ ordinateurs car une réponse sur deux au hasard sera juste à peu près. Les étudiants peuvent obtenir bien mieux s'ils conviennent entre eux de la méthode de jeu suivante :

— L'étudiant 1 (le plus à droite) répondra en donnant la couleur du chapeau de l'étudiant 2, qui connaîtra donc de manière certaine la couleur de son chapeau (puisqu'il entend ce que dit l'étudiant 1).
— L'étudiant 2 répétera ce que l'étudiant 1 aura proposé et gagnera donc.
— L'étudiant 3 répondra en donnant la couleur du chapeau de l'étudiant 4 qui connaîtra de manière certaine la couleur de son chapeau.
— L'étudiant 4 répétera ce que l'étudiant 3 aura proposé et gagnera donc.
— ...

Cette façon de procéder assure aux étudiants d'avoir au moins $\frac{N}{2}$ réponses exactes si N est pair et $\frac{N-1}{2}$ si N est impair. En moyenne, le nombre de réponses justes sera environ $\frac{3N}{4}$, car les étudiants de rang impair tomberont juste une fois sur deux environ.

C'est très bien, se disent les étudiants qui s'apprêtent à adopter cette tactique de jeu. Pourtant, l'un d'eux, Alonso, intervient et dit : « *Non, j'ai une autre idée, nous pouvons être certains de gagner* $N-1$ *ordinateurs au moins, et une fois sur deux* N *ordinateurs*. »

Alonso est un bon étudiant qui ne se trompe jamais. Quelle est l'idée d'Alonso ?

Autre question : la méthode d'Alonso s'adapte-t-elle au cas où la couleur du chapeau est possible non plus parmi deux couleurs, mais parmi k couleurs avec $k > 2$? Et s'il y a une infinité de couleurs ?

SOLUTION. Merci à Vincent Poirriez qui m'a fait parvenir une bonne solution pour le problème avec deux couleurs.

La solution se fonde sur la transmission, d'étudiant en étudiant, de l'information sur la parité (le caractère *pair* ou *impair*) du nombre de chapeaux rouges placés à partir de lui. Plus précisément :

— L'étudiant 1 (le plus à droite) indique *rouge* pour son chapeau si le nombre de chapeaux *rouges* qu'il voit est pair et il indique *bleu* sinon. Il a une chance sur deux de gagner.

— L'étudiant 2, s'il voit devant lui un nombre de chapeaux *rouges* qui a la même parité que le nombre de chapeaux rouges qu'a vu l'étudiant 1 (ce qu'il sait puisqu'il a entendu la réponse de l'étudiant 1) est certain d'avoir sur la tête un chapeau bleu, et sinon, d'avoir sur la tête un chapeau rouge. Il répond conformément à sa déduction et ne peut pas se tromper.

— L'étudiant 3 connaît la parité du nombre de chapeaux rouges parmi les chapeaux de 2 à N car il a entendu la réponse de l'étudiant 1. Il sait aussi si l'étudiant 2 porte un chapeau rouge ou noir, car il a entendu sa réponse qu'il sait bonne. Il connaît donc la parité du nombre de chapeaux rouges des étudiants des rangs 3 à N. Comme il voit aussi tous les chapeaux des rangs 4 à N, il en déduit la couleur de son chapeau.

— De proche en proche, tous les étudiants du deuxième jusqu'au dernier donnent la bonne couleur pour leur chapeau. Au total, tous, sauf peut-être le premier, devinent correctement la couleur de leur chapeau. Le premier, lui, n'a qu'une chance sur deux de tomber juste.

En résumé : une fois sur deux, les étudiants emporteront N ordinateurs, et une fois sur deux, ils en emporteront $N - 1$.

Cette méthode s'étend sans problème si les couleurs possibles sont en nombre fini, k où k est un entier strictement supérieur à 1 et elle permet de gagner au moins $N - 1$ ordinateurs. L'étudiant 1 indique la couleur correspondant à la valeur modulo k de la somme des valeurs des couleurs des chapeaux qu'il voit. L'étudiant 2 en déduit la valeur modulo k de la couleur de son chapeau et donc cette couleur, ce qui, une fois qu'il l'a énoncé à voix haute, permet à l'étudiant 3 de calculer sa couleur, etc.

Lorsque les couleurs sont en nombre infini, la méthode s'adapte encore pour assurer au moins $N - 1$ réponses justes. On associe à chaque couleur un nombre entre 0 et 1 (on le prend rationnel si les couleurs sont une infinité dénombrable, et réel si les couleurs sont une infinité continue). On procède alors comme précédemment, en calculant modulo 1 (à la place de modulo k).

Nouveau problème

LE SYSTÈME DE RÈGLES ESPERLUETTE

Le symbole typographique « & » porte le nom d'*esperluette*. Il donne son nom au système de trois règles ci-dessous. Dans la présentation des règles, x et y désignent des suites quelconques (éventuellement vides) de symboles pris parmi 0, 1 et &.

Règle r_1 : $\&x \to 0\&x$
Règle r_2 : $x0\&\&y \to x\&0y$
Règle r_3 : $x0\&y \to x1y$

La première règle signifie que si une suite de symboles pris parmi 0, 1 et & commence par &, on peut introduire un 0 devant la suite. La seconde règle signifie que si dans une suite de symboles pris parmi 0, 1, et & on trouve quelque part la séquence 0&&, alors on peut la remplacer par &1. De même, la règle 3 permet de remplacer 0& par 1.

Exemples d'utilisation :

$\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&\& \to_{r_1} 0\&\&\&\&\&\&\&\&\&\&\& \to_{r_2} \&0\&\&\&\&\&\&\&\&\&\& \to_{r_2} \&\&0\&\&\&\&\&\&\&\& \to_{r_2} \&\&\&0\&\&\&\&\&\& \to_{r_2} \&\&\&\&0\&\&\&\& \to_{r_2} \&\&\&\&\&0\& \to_{r_1} 0\&\&\&\&\&0\& \to_{r_2} \&0\&\&\&0\& \to_{r_2} \&\&0\&0\& \to_{r_1} 0\&\&0\&0\& \to_{r_1} \&00\&0\& \to_{r_1} 0\&00\&0\& \to_{r_3} 100\&0\& \to_{r_3} 1010\& \to_{r_3} 1011$

Une fois qu'on a réussi à se débarrasser de tous les &, on a obtenu 1011 qui est la notation en binaire de l'entier onze correspondant au nombre de & pris au départ. Est-ce un hasard ? Si c'est un hasard, donnez un exemple d'utilisation des règles à partir d'une suite de k fois & qui aboutit à une suite de 0 et de 1 qui n'est pas l'écriture binaire de k. Si ce qui vient de se produire est général, c'est-à-dire : (a) si toute suite de k fois & ($k > 0$) peut se transformer en une suite de 0 et de 1, et (b) si c'est le cas, la suite obtenue est la notation en binaire de k, alors donnez-en une justification.

Envoyez vos réponses à jean-paul.delahaye@univ-lille.fr. Le nom des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.