



Les pièces magnétiques

Jean-Paul Delahaye¹

La rubrique « Récréation informatique » propose une petite énigme algorithmique ou sur un thème de mathématiques discrètes susceptible d'intéresser un lecteur de 1024. La solution est donnée dans le numéro suivant.

Rappel et solution du problème précédent

LE SYSTÈME DE RÈGLES ESPERLUETTE

Le symbole typographique « & » porte le nom d'*esperluette*. Il donne son nom au système de trois règles ci-dessous. Dans la présentation des règles, x et y désignent des suites quelconques (éventuellement vides) de symboles pris parmi 0, 1 et &.

- Règle r_1 : $&x \rightarrow 0&x$
- Règle r_2 : $x0&&y \rightarrow x&0y$
- Règle r_3 : $x0&y \rightarrow x1y$

La première règle signifie que si une suite de symboles pris parmi 0, 1 et & commence par &, on peut introduire un 0 devant la suite. La seconde règle signifie que si dans une suite de symboles pris parmi 0, 1, et & 0&&, alors on peut la remplacer par &0. De même, la règle 3 permet de remplacer 0& par 1.

1. Professeur émérite, université de Lille, campus scientifique, CRISAL UMR CNRS, 9189 Centre de recherche en informatique signal et automatique de Lille, bâtiment ESPRIT, 59655, Villeneuve d'Ascq Cedex France. E-mail : jean-paul.delahaye@univ-lille.fr.

— donc, quand on réussit à passer d'une écriture avec k fois & à une écriture avec uniquement des 0 et des 1, à chaque étape de transformation, l'entier représenté par les composantes A et B reste le même. La transformation opère donc la conversion de k en écriture binaire.

Reste à contrôler que l'application d'une règle r_1 , r_2 ou r_3 ne change pas le nombre représenté. C'est bien clair pour r_1 car les zéros en tête d'une écriture binaire ne comptent pas. La règle r_2 remplace 0&& par &0. Elle remplace donc deux & qui valaient chacun 2^i , où i est le nombre des 0 et 1 à droite de ces deux &, par un & qui vaut 2^{i+1} puisqu'il y a un chiffre 0 en plus à sa droite. Dans le décompte de la composante B, on remplace donc $2^i + 2^i$ par 2^{i+1} ; ce qui ne le change pas. La règle r_2 ne change pas la composante A. Le total ne change donc pas. Un raisonnement du même type montre que r_3 ne change pas l'entier représenté.

Pour être certain que la méthode décrite opère la conversion de k en binaire, il faut donner la priorité aux règles r_1 et r_2 sur la règle r_3 . Si on respecte ce principe de priorité alors les 0 introduits par r_1 se déplacent uniquement vers la droite et ne sont arrêtés que lorsque la suite de symboles ne comportent plus deux & consécutifs, situation où l'utilisation de r_3 ne peut pas faire réapparaître deux & consécutifs, et, où appliquée de manière répétée, elle fait disparaître tous les &.

Nouveau problème

LES PIÈCES MAGNÉTIQUES

On procède à des lancés successifs de pièces magnétiques dans une boîte à deux compartiments A et B. Au départ, il y a une pièce dans chaque compartiment. Quand on lance une nouvelle pièce magnétique, elle peut tomber dans le compartiment A ou dans le compartiment B. S'il y a x pièces dans A et y dans B, du fait de son magnétisme, la nouvelle pièce tombe dans A avec une probabilité $\frac{x}{x+y}$ et dans B avec une probabilité $\frac{y}{x+y}$. On lance ainsi 1000 pièces magnétiques en plus des deux pièces initiales.

Quelle est la probabilité pour que le nombre de pièces s'équilibre exactement entre A et B quand on a lancé les 1000 pièces? Quelle est la probabilité pour que toutes les pièces lancées aillent en A? Indication : le résultat est simple.

Envoyez vos réponses à jean-paul.delahaye@univ-lille.fr. Le nom des premiers lecteurs à me donner la bonne réponse (et à la justifier) seront mentionnés dans le prochain numéro de 1024.